Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
3$^{\text{er}}$ Examen Parcial (35 %)
Sep-Dic 2017

Turno 7-8
Duración: 1 hora 50 minutos

RESPUESTAS

Pregunta 1. (5 ptos.) Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(x)-\cos\big(x^2\big)}{x^2}$

Solución: Como $\lim_{x\to 0}\Big(\cos^2(x)-\cos\big(x^2\big)\Big) = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$ y $\lim_{x\to 0}\Big(-2\cos(x)\operatorname{sen}(x)+2x\operatorname{sen}\big(x^2\big)\Big) = 0 = \lim_{x\to 0} 2x$, la Regla de L'Hôpital establece

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-\cos\big(x^2\big)}{x^2} \overset{\text{L'H}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(x)\operatorname{sen}(x)+2x\operatorname{sen}\big(x^2\big)}{2x}$$

$$\underset{\text{L'H}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2(x)-2\cos^2(x)+4x^2\cos\big(x^2\big)+2\operatorname{sen}\big(x^2\big)}{2} = -1$$

ya que el último límite existe.

Pregunta 2. (5 ptos.) Halle la derivada de

$$f(x) = \operatorname{sen}\Big(x^2+\operatorname{sen}\Big(x^2+\operatorname{sen}\big(x^2\big)\Big)\Big)$$

Solución:

$$f'(x)=\cos\Big(x^2+\operatorname{sen}\Big(x^2+\operatorname{sen}\big(x^2\big)\Big)\Big)\Big(2x+\cos\Big(x^2+\operatorname{sen}\big(x^2\big)\Big)\Big(2x+2x\cos\big(x^2\big)\Big)\Big)$$

Pregunta 3. (5 ptos.) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $\operatorname{sen}(2x-y)=\dfrac{x^2}{y}$ en el punto de coordenadas $(0,\pi)$.

Solución: Derivando implícitamente obtenemos

$$\big(2-y'\big)\cos(2x-y)=\frac{2xy-x^2y'}{y^2}$$

y, evaluando en $(x,y)=(0,\pi)$ despejamos la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto,

$$y'\Big|_{(x,y)=(0,\pi)}=2$$

por lo que la ecuación de la recta es $y=2x+\pi$.

Pregunta 4. (10 ptos.) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$, halle:

a. Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas);

b. Puntos críticos;

c. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento;

d. Intervalos de concavidad;

e. Puntos de inflexión.

Solución: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty\\
\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=\infty\\
\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1-2/x+2/x^2}{1-1/x}=1\\
\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-1x\big) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1+2/x}{1-1/x}=-1\\
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x+2/x^2}{1-1/x}=1\\
\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-1x\big) &= \lim_{x\to\infty}\frac{-1+2/x}{1-1/x}=-1
\end{aligned}$$

Posee asíntota vertical en $x = 1$.
Posee asíntota oblicua $y = x - 1$ tanto para $x \to -\infty$ como para $x \to \infty$.
No posee asíntota horizontal (ya que posee oblicua hacia ambos lados).

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$, siendo ambos estacionarios.

$$\begin{array}{lcl} f'(x) > 0 & \iff & x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \\ f'(x) < 0 & \iff & x \in (0, 1) \cup (1, 2) \end{array}$$

f es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(2, \infty)$.
f es decreciente en $(0, 1)$ y en $(1, 2)$.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$\begin{array}{lcl} f''(x) > 0 & \iff & x \in (1, \infty) \\ f''(x) < 0 & \iff & x \in (-\infty, 1) \end{array}$$

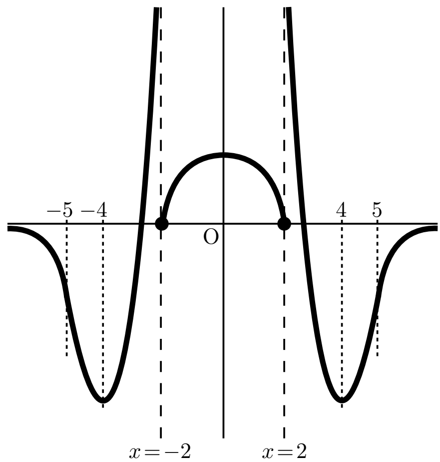
f es cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$.
f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$.
No posee puntos de inflexión.

Pregunta 5. (5 ptos.) Haga un bosquejo de la gráfica de F sabiendo que:

- $\mathrm{Dom}(F) = \mathbb{R}$ y F es diferenciable en $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$
- $F(x) = F(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} F(x) = F(2) = 0 \qquad \lim_{x \to 2^+} F(x) = \infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$
- $F'(x) < 0$ si $x \in (0, 2) \cup (2, 4)$ y $F'(x) > 0$ si $x \in (4, \infty)$
- $F''(x) < 0$ si $x \in (0, 2) \cup (5, \infty)$ y $F''(x) > 0$ si $x \in (2, 5)$

Además, determine si la gráfica de F alcanza un mínimo global.

Solución:



Como F es creciente en $(4, \infty)$, decreciente en $(2, 4)$ y continua en $(2, \infty)$, ella posee un mínimo local en $x = 4$ cuyo valor es menor que cero pues $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Como F es decreciente en $(0, 2)$ y $F(2) = 0$ entonces $F(x) \geq 0$ si $x \in [0, 2]$ pues F es continua en $[0, 2]$ $\big($por ser diferenciable en $(-2, 2)$ y $\lim_{x\to 2^-} F(x) = F(2)\big)$. Por lo tanto, como F es una función par, $x = 4$ y $x = -4$ son mínimos globales y el valor mínimo $F(4) = F(-4)$ es alcanzado.

Pregunta 6. (5 ptos.) Halle las dimensiones del rectángulo con mayor área inscrito entre los ejes de coordenadas y la recta $2x + 3y = 6$.

Solución: La región delimitada por los ejes coordenados y la recta $2x + 3y = 6$ está en el primer cuadrante. Si denotamos la base del rectángulo por b y su altura por a entonces uno de los vértices del rectángulo es el origen y el vértice opuesto, (b, a), está sobre la recta $2x + 3y = 6$. Así, $2b + 3a = 6$ con $b \in (0, 3)$ y $a \in (0, 2)$. El área del rectángulo viene dada por

$$f = f(b) = ba = b\left(-\frac{2}{3}b + 2\right)$$

Como $f'(b) = -\frac{4}{3}b + 2$, el único punto crítico, que es estacionario, ocurre en $b = {}^{3}\!/_{2}$. Además, como $f''(b) = -{}^{4}\!/_{3} < 0$, la función alcanza su valor máximo en $f\big({}^{3}\!/_{2}\big)$. Así, las dimensiones deseadas son base $b = {}^{3}\!/_{2}$ y altura $a = 1$.